

学校编码: 10384

分类号_____ 密级_____

学号: 19120080150450

UDC_____

厦门大学

博士学位论文

磁流体力学方程组的整体适定性

Global well-posedness of
the magnetohydrodynamic equations

陈 卿

指导教师姓名: 谭 忠 教授

专 业 名 称: 应 用 数 学

论文提交日期: 2011 年 4 月

论文答辩日期: 2011 年 6 月

学位授予日期: 年 月

答辩委员会主席: _____

评 阅 人: _____

2011 年 4 月

厦门大学博硕士论文摘要库

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（ ）课题（组）的研究成果，获得（ ）课题（组）经费或实验室的资助，在（ ）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年 月 日

厦门大学博硕士论文摘要库

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

- ☐ 1. 经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于 年 月 日解密，解密后适用上述授权。
- ☐ 2. 不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年 月 日

厦门大学博硕士论文摘要库

目 录

中文摘要	V
英文摘要	VII
第 一 章 绪论	1
第 二 章 可压磁流体方程的整体光滑解及衰减估计	3
2.1 介绍	3
2.2 预备知识	4
2.3 等熵情形	8
2.4 非等熵情形	29
第 三 章 可压非等熵磁流体方程的强解	49
3.1 介绍	49
3.2 预备知识	50
3.3 线性化方程组及一致估计	54
3.4 整体强解的存在性	65
第 四 章 不可压磁流体方程强解的存在性及爆破标准	77
4.1 介绍	77
4.2 预备知识	79
4.3 弱解的存在性及唯一性	81
4.4 强解的整体存在性	91
参考文献	97
在学期间发表的学术论文与研究成果	103
致谢	105

厦门大学博硕士论文摘要库

Contents

Chinese Abstract	V
English Abstract	VII
Chapter I Preface	1
Chapter II Global Existence and Convergence Rates of the Smooth So-	
lutions for the Compressible Magnetohydrodynamic Equations	3
2.1 Introduction	3
2.2 Preliminaries	4
2.3 Isentropic Case	8
2.4 Non-isentropic Case	29
Chapter III Strong Solutions for the Compressible Non-isentropic Mag-	
netohydrodynamic Equations	49
3.1 Introduction	49
3.2 Preliminaries	50
3.3 Linearized Equations and Uniform estimates	54
3.4 Global Existence of the Strong Solutions	65
Chapter IV Existence of Strong Solutions and Blow-up Criterion for the	
Incompressible Magnetohydrodynamic Equations	77
4.1 Introduction	77
4.2 Preliminaries	79
4.3 Existence and Uniqueness of the Weak Solutions	81
4.4 Global Existence of the Strong Solutions	91
References	97
Major Academic Achievements	103
Acknowledgements	105

厦门大学博硕士论文摘要库

中文摘要

本文考虑的是磁流体力学系统 (也称 MHD)。(MHD) 系统描述了连续流体媒介在电磁场中的运动, 因此它是电磁现象和流体动力学现象的复杂作用的结果。本文主要从数学理论方面研究 (MHD) 系统, 讨论 (MHD) 方程组的整体适定性问题, 主要内容包括两个部分。第一部分为第二章和第三章, 研究可压的 (MHD) 系统整体解的存在性, 唯一性以及渐近行为问题。第二部分为第四章, 研究不可压的 (MHD) 系统整体强解的存在性和唯一性问题。

在第二章中, 我们对可压的 (MHD) 系统分等熵和非等熵两种情形进行讨论。对初值在 $H^3(\mathbb{R}^3)$ 中充分靠近常状态的 Cauchy 问题, 我们由标准能量方法得到整体光滑解的存在唯一性。若初值还属于 $L^1(\mathbb{R}^3)$, 结合线性方程组的衰减估计和对高阶导项的能量估计, 我们可以得到解的 L^q -模 ($2 \leq q \leq 6$) 和解关于空间变量的一阶导的 L^2 -模的最佳衰减估计。特别地, 对非等熵的可压的 (MHD) 系统, 我们通过分解速度场, 得到线性方程组的衰减估计。另外, 若初值在 $H^4(\mathbb{R}^3)$ 中充分靠近常状态, 那么我们还可以得到解关于空间变量的二阶导的最佳衰减估计。

在第三章中, 我们考虑的是可压的 (MHD) 系统。假设初值在 Besov 空间中充分靠近常状态, 其中常状态是由常数密度和温度, 零速度, 常向量磁场强度组成, 我们通过迭代法, 一致估计以及紧性方法, 得到初值问题的整体强解的存在唯一性。

在第四章中, 我们考虑的是不可压的 (MHD) 系统。对初值满足一定的正则性和兼容性条件的 Cauchy 问题, 我们通过 Galerkin 逼近方法, 能量方法和区域扩张技巧得到局部强解的存在唯一性。最后, 我们提出一个爆破准则, 并在小初值的假设条件下得到了整体强解的存在性。

关键词: 磁流体力学方程组, 磁场强度, 可压, 不可压, 光滑解, 强解, 衰减估计

厦门大学博硕士论文摘要库

Abstract

This thesis is concerned with magnetohydrodynamic system (MHD) which describes the motion of electrically conducting media in the presence of a magnetic field. (MHD) models the interactions between the fluid dynamics and the magnetic field. In this paper, we consider the mathematical theory of (MHD) system and study the global well-posedness of the equations of Magnetohydrodynamics. There are two parts in this paper. The first part consists of Chapter 2 and Chapter 3, in which we study the global existence and uniqueness of the solutions of the compressible (MHD). The second part consists of Chapter 4, in which we study the global existence and uniqueness of the strong solutions of the incompressible (MHD).

In Chapter 2, we consider the compressible (MHD) for the isentropic and non-isentropic cases. Under the condition that the initial data are close to the constant equilibrium state in the H^3 -framework, we prove the global existence and uniqueness of the smooth solutions of the Cauchy problem by standard energy method. If additionally the initial data belong to L^1 , the optimal convergence rates of the solutions in L^q -norm with $2 \leq q \leq 6$ and its spacial first derivatives in L^2 -norm are obtained by combining the decay estimates of the linear system and the high-order energy estimates. Especially, for the non-isentropic case, we derive the decay estimates of the linear equations after decomposing the vector field. Moreover, if the initial data are close to the constant equilibrium state in H^4 -framework, we can get the optimal decay rates of the spacial derivatives of the second order.

In Chapter 3, we consider the compressible (MHD). Under the condition that the initial data are close to the constant equilibrium state with constant density, temperature and magnetic field in the Besov space, we prove the global existence and uniqueness of the strong solutions by using an iterative method, the uniform estimates and the compactness argument.

In Chapter 4, we consider the incompressible (MHD). Under the condition that the initial data satisfy some regularity condition and a natural compatibility condition, we prove the local existence and uniqueness of strong solutions by Galerkin scheme, energy method and the domain expansion technique. Then we develop a blow-up criterion

for local strong solutions and prove the global existence of strong solutions under the smallness assumption of initial data.

Key words: Magnetohydrodynamic equations, magnetic field, compressible, incompressible, smooth solution, strong solution, decay rate

厦门大学博硕士论文摘要库

第一章 绪论

磁流体力学研究等离子体这种导电流体在电磁场中的运动。等离子体在电磁场中的运动产生电流，从而在媒质内部感生出电磁场，引起原有电磁场的改变；另一方面，电磁场的存在对运动着的导电等离子体产生洛伦兹力，这又会对导电等离子体的运动产生影响。因此，这就产生了电磁现象和流体动力学现象的复杂的相互作用。也就是说，等离子体在电磁场中的运动，既应遵守电磁场的基本运动规律，又要遵守流体力学的运动规律。因此，将流体力学方程组和 Maxwell 方程组适当耦合起来，这样联立起来的方程组就是磁流体力学方程组。

近年来，许多数学工作者对磁流体力学系统做了大量的研究工作^[1-9]。在一维情形，一些关于解的存在唯一性结果得到研究，如^[1-3,5,7,10,11]。尽管如此，很多关于 (MHD) 的基本问题仍然是公开的。例如在一维情形，带大初值的 (MHD) 系统，在粘性系数，热传导系数和磁扩散系数全为常数的情况下，它的整体光滑解是否存在仍是未知的。而对 Navier-Stokes 方程组，类似的问题早在^[12]中得到解决。原因就在于磁场和流体运动的相互作用引起了很大的困难。如果不考虑电磁场的作用，系统将蜕化为可压的 Navier-Stokes 方程组。对 Navier-Stokes 方程组的研究可以见^[13-15]及其引用文。特别地，Z. P. Xin^[16]，Y. Choe 和 B. J. Jin^[17]，O. Rozanova^[18,19] 研究了对可压的 Navier-Stokes 方程组，如果初始密度具有紧支集，或者初始质量有限，无论初值有多小，那么它的强解或者光滑解必在有限时间内爆破。其中 O. Rozanova^[19] 证明了对磁流体方程组也有类似的结果。因此，在假设初始密度有正下界的条件下，对高维的可压的磁流体力学方程组，我们考虑它在初值充分靠近常状态时整体光滑解或强解的存在性结果及大时间行为。而另一方面，鉴于 H. J. Choe 和 H. Kim^[20,21] 对不可压的 Navier-Stokes 方程强解的存在性工作，我们考虑了不可压的 (MHD) 系统在初值满足一定的正则性和兼容性条件下强解的存在唯一性问题，并证得无论是否有真空，当初值充分小时，强解是整体存在的。

本文的具体内容安排如下：

在第二章中，我们研究的是可压磁流体力学方程组在初值充分靠近平衡态时整体光滑解的存在性及衰减估计。首先，我们对方程组进行线性化，并对方程做先验估计。由经典方法或者结合 G. Ströhmer^[22]，A. I. Vol'pert 和 S. I. Hudjaev^[23] 的作法，得到磁流体系统的局部解存在性。结合先验估计，由标准方法^[24,25]我们得到整体解的存在性。为了估计解的衰减速率，我们先对线性方程组做衰减估计。对等熵情形，我们对相应的线性方程组进行 Fourier 变换，通过求解带初值的常微分方程组的方法，直接求得方程组的解，进而得到解及其导数的 L^2 模估计。而对非线性系统，我们首先可以用半群将解表

达出来,再通过线性方程组解的衰减估计,以及对解及其导数 L^2 的精细估计,我们可以得到关于解本身,一阶导和二阶导的最佳估计。而对非等熵情形,我们无法通过直接求解的方式表示出经过 Fourier 变换后的线性方程组的解。因此,我们将速度分解为“可压部分”和“不可压部分”,动量方程就等价于有关“可压部分”和“不可压部分”的两个方程。其中“不可压部分”的方程则是一个标准的热方程,它和磁场方程一样,解具有最佳衰减估计。对转化后的方程组进行 Fourier 变换,我们将得出常微分方程组特征值的 Taloy 级数展式,并通过对对应的投影算子的分析,得到解半群的估计,从而得到线性方程组的解的衰减估计。

在第三章中,我们研究的是可压的,非等熵的磁流体系统在初值充分靠近常状态,其中密度和温度靠近一个正常数,速度靠近零,磁场强度靠近一个常向量时强解的整体存在唯一性。首先,我们对磁流体方程组进行伸缩变换,并线性化,从而得到一个新的方程组。在新的方程组里,我们将速度和磁场强度都分解为“可压部分”和“不可压部分”。由于磁场强度的散度等于零,因此它的“可压部分”为零。这样我们将得到有关密度,温度,速度的“可压部分”和“不可压部分”,磁场强度的“不可压部分”组成的一组方程组,并且它和原方程组是等价的。接下来,我们对方程组做一致估计,采用迭代的方式构造逼近解。并利用对逼近解的一致有界性,由 Ascoli 定理和对角线法则,得到收敛解。最后,我们用反证法证明解的唯一性。反设初始问题具有两个不同的解,将两解所在的方程作差,并作能量估计。结合前面得到的能量不等式,即可得到解的唯一性。

在第四章中,我们研究的是不可压的磁流体系统在小初值的假设条件下的整体强解存在唯一性。假设系统初值满足一定的正则性和兼容性,我们由 Galerkin 方法构造有限区域上的逼近解,再由能量方法获得弱解,最后由区域扩张技巧得到 Cauchy 问题的局部弱解。通过对正则性的提高,我们得到了局部强解存在性。并通过对满足相同系统的两个解作差的方式,由能量方法得到唯一性。最后,我们提出一个爆破准则,并证得当初值充分小时,解在任意时间内是不会爆破的,也就是说,在小初值的假设条件下,我们得到了强解的整体存在性。

Degree papers are in the "[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)". Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to etd@xmu.edu.cn for delivery details.

厦门大学博硕士论文摘要库